



TITLE:

日経 225 オプションのデルタヘッジに関する一考察(不確実性を含む意思決定の数理とその応用)

AUTHOR(S):

星加, 裕文; 宮崎, 浩一

CITATION:

星加, 裕文 ...[et al]. 日経 225 オプションのデルタヘッジに関する一考察 (不確実性を含む意思決定の数理とその応用). 数理解析研究所講究録 2007, 1548: 218-225

ISSUE DATE:

2007-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/80815>

RIGHT:

日経 225 オプションのデルタヘッジに関する一考察

電気通信大学大学院 電気通信学研究科 システム工学専攻
星加裕文(Hirofumi Hoshika), 宮崎浩一(Koichi Miyazaki)

University of Electro-Communications, Department of Systems Engineerings.

1. はじめに

オプション価格評価式を初めて与えた有名なブラックショールズモデル, Black・Scholes(1973)が発表されてから 30 年以上が経過した今日, オプション市場は金融市場参加者にとって必要不可欠な市場に発展した. また, 金融工学もこの 30 年間に爆発的に発展し, オプション評価に関する研究は, 数多く行われてきた. しかし, オプション評価の研究は, 他の金融工学の分野である株式や債券などのアセットアロケーションや企業分析といった分野と比較すると, 研究の方向性がオプション評価モデルの精緻化に向き, 実証的研究が比較的手薄にある. オプション評価に関する実証的研究のなかで, デルタヘッジ戦略に関する先行研究は, 淵江(2002)と矢萩, 宮崎(2005)の 2 つがある. 淵江(2002)では日経 225 オプション価格がある期間における株価リターンの実現ボラティリティを用いたブラックショールズモデルによる理論価格よりも割高である場合に, 日経 225 オプションを売却して週次でデルタヘッジを行い, また割安である場合に, 日経 225 オプションを購入して週次でデルタヘッジを行うことで, どの程度の収益があがるかを実証的に分析して概ね収益があがる結果を示した. しかし, 淵江(2002)の実証分析結果をみると, 日経 225 オプションを理論価格よりも割高である場合に売却, 割安である場合に購入したうえで, デルタヘッジを行っている(理論的には収益があがる取引を行っている)にもかかわらず, 取引コストを考慮すると収益がマイナスとなった. また, 矢萩, 宮崎(2005)では, 淵江(2002)と同様のオプションの売買のもと, 1000 個のサンプルパスを発生させたシミュレーションを行い, デルタヘッジにおける収益の不確実性に関する検証を行った. その際には, ヘッジ間隔や取引回数を変化させる場合も検討したが, いずれの場合でも取引コストを考慮すると, 多くのパスで収益がマイナスとなった.

通常, オプションを売買してデルタヘッジを行う場合には, 売却したオプションの IV がデルタヘッジを行う期間における実現ボラティリティよりも大きい場合に収益が上がり, 逆の場合に損失が発生する. その際には, ある原資産(例えば日経 225 インデックス)のオプションを売却した場合に当該資産(日経 225 インデックス)でヘッジすることが前提となっている. 本研究では, デルタヘッジの原資産の前提を緩めて原資産には日経 225 インデックスではなく, 日経 225 インデックスに組み込まれている個別銘柄から構築される個別銘柄バスケットを用いる. デルタヘッジの際には, ある原資産(日経 225 インデックス)のオプションを売却した場合に, この原資産のリターンと同じ 2 次モーメント(ボラティリティ)を持ち, 1 次モーメントのみが異なる(高くなる)個別銘柄バスケットを構築してデルタヘッジを行う. さらに, 現実の収益は 1 次モーメントの大きさだけでなく予測収益のロバスト性にも依存することから, 個別銘柄バスケットを構成する社数を増加させ, 分散効果を高めた場合の検証も行う. 本研究の実証分析では, 取引コストを考慮し, かつ, 1 次モーメントの大きさと個別銘柄バスケットを構成する社数のトレードオフに関して検証を行う.

本論文の構成は, 以下の通りである. 次節では, オプションとそのデルタヘッジの説明を行う. 3 節では, 最適な個別銘柄バスケットを構成して, その 1 次モーメント(ドリフト)が日経 225 イン

デックスと異なることを利用して収益を上げるヘッジ手法を提案する。4 節では、実証分析を行う。最終節では、まとめと結語を付す。

2. オプションとデルタヘッジの考え方

2.1 オプションとは

オプションとは、「所定の期日(満期 T)に、ある特定の資産(例えば日経 225 インデックス S_T)をあらかじめ定めた価格(権利行使価格 K)で買う(もしくは売る)ことができる権利」のことである。図 1 には、満期 T における日経 225 インデックス S_T に関して、権利行使価格が 1000 円、オプション価格が 100 円のコール・オプション(買う権利)のペイオフダイアグラムを示した。日経 225 インデックス株価 S_T が、権利行使価格 K より高い場合をイン・ザ・マネー(ITM)、逆に株価が低い場合をアウト・オブ・マネー(OTM)、そして同じ場合をアット・ザ・マネー(ATM)と呼ぶ。本研究では ATM コール・オプションを用いて検証を行う。

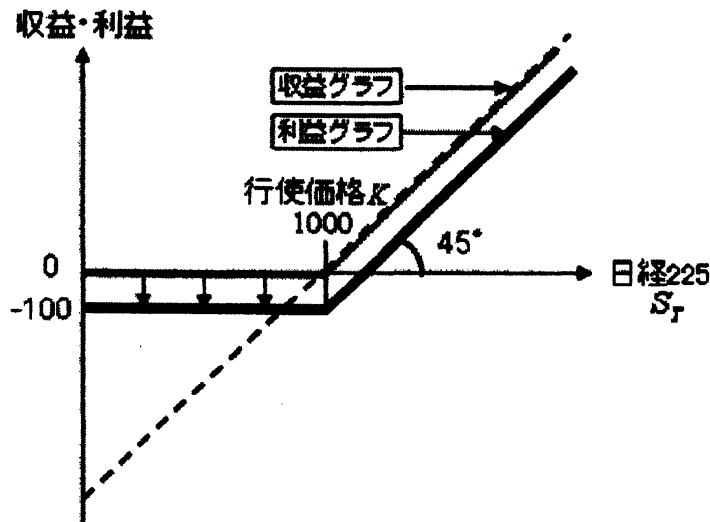


図 1 満期におけるコール・オプションのペイオフダイアグラム

2.2 デルタヘッジの考え方

デルタヘッジとは、オプションを原資産を用いてヘッジする手法で、コール・オプションを売却(購入)し、株式を購入(売却)することで無リスクポートフォリオを構築するものである。まず株価が従う確率過程として、次の幾何ブラウン運動を仮定する。

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW_t \quad (1)$$

ここで、 S は原資産価格、 μ は株価リターンの期待値(1 次モーメント)、 σ は株価リターンのボラティリティ(2 次モーメント)、 dW_t はウィナー過程である。原資産価格 S が式(1)に従うときに、現時点におけるコール・オプション価格を $f(t, S)$ で表すと、伊藤の公式から $f(t, S)$ が従う過程は式(2)で与えられる。

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dW_t \quad (2)$$

式(1)をみると株価の確率的振る舞いを示す部分は $\sigma S dW_t$ であり、コール・オプション価格の確率的振る舞いを示す部分は式(2)の $(\partial f / \partial S) \sigma S dW_t$ である。そこで、コール・オプションを 1 単位

売却すると共に、原資産株式を $\partial f / \partial S$ (デルタと呼ぶ) 単位購入して価格変動リスクのない(確率的振る舞いのない)無リスクポートフォリオ Π を構築することを考える。

$$\Pi = -f + (\partial f / \partial S)S \quad (3)$$

微小時間 dt における無リスクポートフォリオ Π の価値変動量は、

$$d\Pi = -df + (\partial f / \partial S)dS \quad (4)$$

と表される。この式(4)に式(1)と式(2)を代入すると無リスクポートフォリオ Π の変動は式(5)となる。

$$\begin{aligned} d\Pi &= -\left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt - \frac{\partial f}{\partial S}\sigma SdW_t + \left(\frac{\partial f}{\partial S}\right)(\mu Sdt + \sigma SdW_t) \\ &= \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt \end{aligned} \quad (5)$$

無リスクポートフォリオ Π の変動(式(5))には、確率的変動はない為、その収益率は無リスク金利 r に等しくなければならない。このようにコール・オプション 1 単位を売却した時に原資産 $\partial f / \partial S$ 単位を購入して無リスクポートフォリオを構築する手法をデルタヘッジという。

3. 本研究モデルにおけるデルタヘッジ

節 3.1 では、日経 225 コール・オプションを個別銘柄バスケットでデルタヘッジする手法を説明する、節 3.2 では、オプションを売却してデルタヘッジを行う戦略と、オプションを購入してデルタヘッジを行う戦略を比較して有利なデルタヘッジ戦略を選択する手法を述べる。節 3.3 では本研究モデルに用いるモーメント予測モデル、節 3.4 では個別銘柄バスケットの構築方法を述べる。

3.1 本研究モデルにおけるデルタヘッジ

本研究におけるデルタヘッジは、節 2.2 に示した通常のデルタヘッジとは異なり、日経 225 インデックスを原資産とするオプションを個別銘柄バスケットを用いてデルタヘッジを行う。節 3.3 で述べる予測モデルを用いて求めたボラティリティから、 $\partial f^p / \partial S^p$ (予測デルタと呼ぶ)を求める。次に節 2.2 と同様に、コール・オプションを 1 単位売却すると共に、原資産株式を予測デルタ単位購入して価格変動リスクのない無リスクポートフォリオ Π を構築することを試みる。

ここではコール・オプションを売却し、個別銘柄バスケットを購入するようなデルタヘッジの説明を行ったが、コール・オプションを購入し、個別銘柄バスケットを売却するようなデルタヘッジを行う場合には逆ポジションをとることとなる。

3.2 有利なデルタヘッジ戦略の決定方法

株式オプション市場で観測されるオプション価格の織り込むボラティリティ σ_t (インプライド・ボラティリティと呼ぶ)が、オプション満期までの予測モデルに基づくボラティリティ σ よりも大きい場合には、割高なオプションを売却し、原資産をデルタ単位購入する。逆にオプション価格が織り込むボラティリティ σ_t が予測モデルに基づくボラティリティ σ よりも大きい場合には、割安なオプションを購入して、原資産をデルタ単位だけ売却してデルタヘッジを行う。本研究では、ボラティリティ σ の予測モデルとして、自己回帰モデルを利用し、有利なデルタヘッジ

戦略の決定を行う。

3.3 各モーメント予測モデル

1次モーメント, 2次モーメントはそれぞれ自己回帰モデル $AR[P]$ モデル (P 次の自己回帰モデル) で予測を行う。その際には AIC (赤池情報量基準) を用いて最も適した次数を選択し, 各モーメントの予測を試みる。本研究の予測では, 1ヵ月後の各モーメントの予測を行うので, t を現時点をとすると $t+1$ は1ヵ月後時点を意味する。

$$z(t+1) = \sum_{i=1}^P a_i z(t+1-i) + v(t) \quad (9)$$

ここで, $z(t+1)$ は1ヵ月後のモーメント, t は現時点, P は次数, a_i は i 期の自己回帰係数, $v(t)$ は平均が0で分散が一定の拡散項である。

$AR[P]$ モデルの次数が P であるとき, 拡散項 $v(t)$ の分散の推定値を $\hat{\sigma}_p^2$ とすると, 最大対数尤度は,

$$l(\hat{\theta}) = -\frac{N}{2} \log 2\pi \hat{\sigma}_p^2 - \frac{N}{2} \quad (10)$$

となる。 P 次の自己回帰係数に含まれるパラメータ数は a_1, \dots, a_P 及び $v(t)$ の $P+1$ 個である。従って, P 次の自己回帰モデルにおける AIC_p の値が最も小さくなった次数が自己回帰モデルの最も適した次数であるとし, 翌期のモーメントの予測を試みる。

$$\begin{aligned} AIC_p &= -2l(\hat{\theta}) + 2(\text{パラメータ数}) \\ &= N(\log 2\pi \hat{\sigma}_p^2 + 1) + 2(P+1) \end{aligned} \quad (11)$$

3.4 個別銘柄バスケットの構築

・最適化モデル(1次モーメントの最大化)

個別銘柄バスケットを構築する際には, 2次モーメントであるボラティリティを日経225インデックスと一致させる制約の下で, 1次モーメント(ドリフト)の最大化を図る。ただしその際に個別銘柄バスケットを構成する社数も考慮する。また, デルタヘッジを行うので原資産と個別バスケットの初期金額は同額とし, 個別銘柄バスケット構築の際には空売りは許さないこととした。1次モーメント, 2次モーメントとしては, 節3.3で述べた予測モデルより求めたデータを用いて分析を行う。次に, コール・オプションが割高な場合を示す。

$$\text{目的関数} \quad \text{MAX} \left[\lambda \sum_{i=1}^N \alpha_i R_i + (1-\lambda) \left(-\sqrt{\sum_{i=1}^N (\alpha_i - \bar{\alpha})^2 R_i^2} \right) \right] \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \text{制約条件} \quad S_{225} &= \sum_{i=1}^N S_i \alpha_i \\ \sigma^2 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \rho_{ij} (\alpha_i \sigma_i) (\alpha_j \sigma_j) \\ \sum_{i=1}^N \alpha_i &= 1, \quad (\alpha_i > 0) \end{aligned} \quad (13)$$

ここで λ は0から1までの0.1刻みの数, i は個別株式, α_i は個別株式 i のウエイト, $\bar{\alpha}$ は各ウエイトの平均値, R_i は個別株式 i の1次モーメント(期待リターン), S_i は個別株式 i の株価, σ_i は個別株式 i の2次モーメント(ボラティリティ), ρ_{ij} は個別株式それぞれの相関係数を表す。

目的関数式(12)を見てみると、第一項目では、期待リターンを高くする為に1次モーメント(期待リターン)の最大化を、第二項目では分散効果を大きくする為に社数の最大化(リスクの抑制)を、それぞれ意図している。個別銘柄バスケットの期待リターン(1次モーメント)が最大となればデルタヘッジゲイン(期待収益)は高くなるが、1次、2次モーメントはそれぞれ予測値を用いているので、デルタヘッジゲインは予測が正確でなければ収益を上げることはできない。そこで予測のロバスト性を高くする為に個別銘柄バスケットに組み入れる社数(銘柄数)が多くなるように目的関数を設定する。本研究モデルでは、式(12)の第一項目と第二項目を λ と $1-\lambda$ で重み付けを行うことで、期待リターン及び社数の混合モデルを構成し、期待リターンと予測のロバスト性の双方を勘案する目的で λ を用いる。つまり λ の値を大きくしていくと、第一項目で期待リターンが高くなり、第二項目で社数は少なくなるように目的関数を設定する。

4. 実証分析

ここでは、実証分析の目的、データ、分析手順を示したうえで、個別銘柄バスケットを用いたデルタヘッジの実証分析結果とその考察を与える。

4.1 実証分析の目的、データ、分析手順

実証分析の目的は、提案モデルを用いて構築した個別銘柄バスケットに基づくデルタヘッジの収益性を検証することである。

実証分析では、2002年5月1日から2005年12月30日までの東証1部上場の日経225インデックス対象銘柄の日次株価データと2003年5月1日から2005年12月30日の残存期間が1ヶ月の日経225インデックスのアウト・ザ・マネーにおけるコール・オプション日次データを用いた。また実証期間はゼロ金利政策下であるので無リスク金利は0とする。分析手順としては次のSTEP1からSTEP4に従う。ここでは、コール・オプションが割高な場合を示す。

- STEP1 日経225インデックスと225社の個別株式の過去1年間の日次データから、1ヶ月ごとの1次、2次のモーメント(期待リターン、ボラティリティ)をそれぞれ求めた後、AICに基づきAR[P]モデルで1次モーメント、2次モーメントの翌月の予測をそれぞれ行う。
- STEP2 予測2次モーメント(ボラティリティ)と、現実取引されている日経225コール・オプションにブラックショールズモデルを用いて求めたインプライド・ボラティリティを比べ、日経225コール・オプションが割高であるか、割安であるかを調べる。
- STEP3 1次モーメント(原資産ドリフト)が日経225インデックスを超えるバスケットの構築の為に、日経225インデックス対象銘柄の中から高いリターンを上げると予測される上位40社を選択し、 λ にウエイトを与えて、個別銘柄バスケットの構築を行う。具体的には、節3.4に示した最適化モデル式に従う。
- STEP4 残存期間が1ヶ月の日経225コール・オプションを売却して、構築したバスケット(もしくは日経225インデックス)をデルタ分だけ購入し、営業日毎にリバランスすることによってデルタヘッジを1ヶ月間試みる。

以上のSTEP1からSTEP4の分析手順を、2003年5月1日から2005年12月30日の期間で月次で実証分析を行った。

4.2 分析結果と考察

4.2.1 社数

目的関数の λ の値を変化させた場合に、個別銘柄バスケットの構築に用いられる社数がどのようになるかを月ごとに図2に示した。実証分析で採用した λ の値は0から1までの0.1刻みであるが、ここでは、 λ が0, 0.3, 0.6, 1の場合に関して示した。 $\lambda=1$ の時は1次モーメントの最大化を、 $\lambda=0$ の時は社数の最大化(予測のロバスト性が最大化)をそれぞれ意図しており、 $\lambda=0$ の時に社数が概ね最大となり、 λ の値を大きくしていくと、社数はだんだん少なくなり、 $\lambda=1$ で社数が概ね最小となる。これは節3.4で示した目的関数式(12)の第二項目の部分が適切に社数の最大化(予測のロバスト性が最大化)を実行できていたと考えられる。

4.2.2 累積デルタヘッジゲイン

図3には、図2において注目した λ の値別に1ヶ月間のデルタヘッジゲインを初期時点の原資産価格で割り、2年8ヶ月の間で累積した累積収益を示した。

日経225インデックス、個別銘柄バスケットのどちらでデルタヘッジしても、累積デルタヘッジゲインは、月ごとに多少変動が見られるものの、累積収益は概ね右上がりとなっており、予測を用いたデルタヘッジ戦略の成功が見て取れる。その要因としては、日経225インデックスの場合は、オプションのインプライド・ボラティリティと実現するボラティリティの差異によって得られた収益である。個別銘柄バスケットの場合は、累積収益はボラティリティの差異に加えて、日経225インデックスの代わりに高いリターンが得られる個別銘柄バスケット用いたことによって得られた収益だと考えることができる。

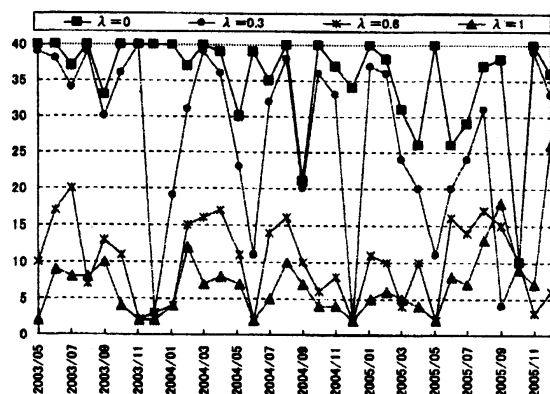


図2 個別銘柄バスケットに採用される社数

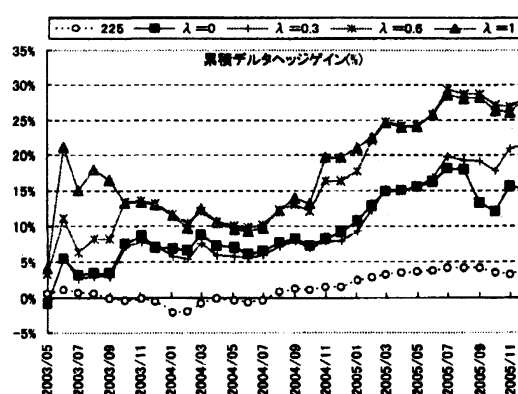


図3 累積デルタヘッジゲイン(%)

4.2.3 収益とその標準偏差(年率%)

日経225インデックスと個別銘柄バスケット(λ は0から1までの範囲で0.1刻み)に関して、収益と標準偏差を年率%で図4に示した。日経225インデックスの収益に比べ、個別銘柄バスケットに用いたデルタヘッジ収益はいずれの λ に関しても高いが、標準偏差も大きくなっている。傾向としては λ の値を大きくすると概ね収益が増加し、 λ の値を小さくすると標準偏差は徐々に減少しているのを見て取れる。これは本研究で設定した目的関数式(12)の第一項目と二項目、それぞれが1次モーメント(ドリフト)の最大化と社数の最大化(予測のロバスト性が最大化)をそれぞれ実行できていたと考えられる。

4.2.4 シャープレシオ(年率%)

先ほどの図4において収益のみに着目すると、1次モーメント(ドリフト)が最大となっている $\lambda = 1$ が適切であると考えられるが、実際に投資家が投資を実行する際には、収益だけでなく、標準偏差にも着目することから、ここでは、収益と標準偏差の双方を考慮したシャープレシオを用いる。シャープレシオとは、収益から無リスク金利を引いた後、標準偏差で割ったものであり、日経225インデックスと λ を0.1刻みの0から1までの範囲に関して、デルタヘッジを行った場合のシャープレシオを図5に示した。

図5を見ると、シャープレシオが最も低いものは日経225インデックスを用いたデルタヘッジで、個別銘柄を用いたデルタヘッジのいずれの λ においても日経225インデックスを上回っており、 λ が0.2から0.7の場合に高いシャープレシオが得られ、リスクを考慮したうえで高いパフォーマンスを確認することが出来た。これは λ の値が、収益と標準偏差とのトレードオフをコントロールしていることが見て取れる。

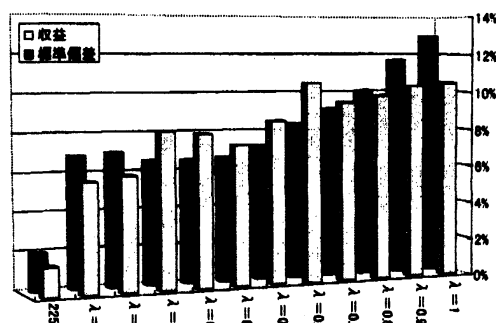


図4 デルタヘッジの収益と標準偏差(年率%)

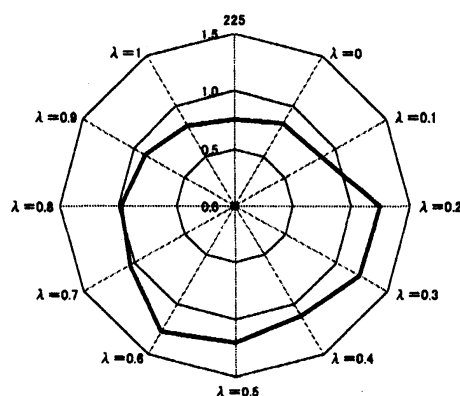


図5 シャープレシオ(年率%)

4.2.5 取引コストを売買金額に対して0.5%とした場合

取引コストを売買金額に対して0.5%を課す場合に節4.2.4と同様の実証分析結果を、図6(コストを考慮したデルタヘッジの収益と標準偏差)、図7(コストを考慮したシャープレシオ)にそれぞれ示した。取引コストは、それぞれの λ や日経225インデックスの原資産のデルタによって多少異なるが概ね年率で4%となっており、日経225インデックスの収益のみマイナスとなってしまう。これはコストを考慮すると、オプションのインプライド・ボラティリティと予測ボラティリティを用いた通常のデルタヘッジでは収益はマイナスとなるが、個別銘柄バスケットを用いることによって得られた収益はプラスとなり、高い収益性を確認することが出来た。

図7を見ると、個別銘柄バスケットは日経225インデックスより明らかに優れていることが確認できる。これはコストを考慮した場合、個別銘柄バスケットの収益性の高さだけでなく、収益と標準偏差の双方を考慮した場合において高いパフォーマンスがあることを示している。

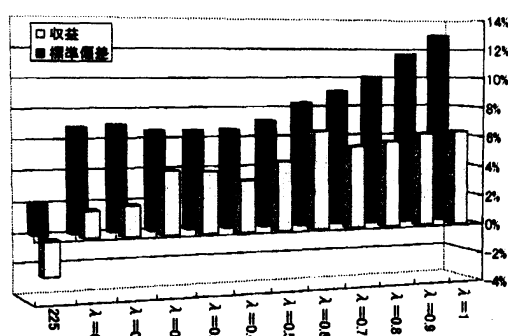


図6 コストを考慮した収益と標準偏差(年率%)

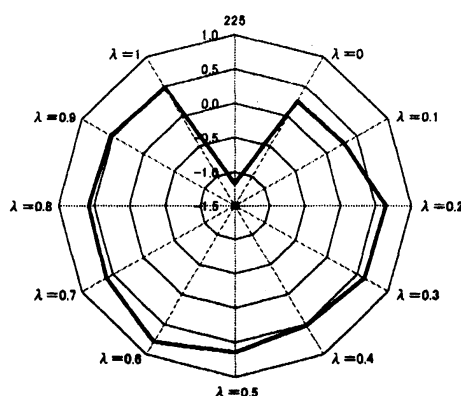


図7 コストを考慮したシャープレシオ(年率%)

5. まとめ

本論文では、デルタヘッジにおいて原資産を日経 225 インデックスとする代わりに個別銘柄バスケットとした場合の収益性を検証した。その際には、オプションのインプライド・ボラティリティと予測ボラティリティの差異によって得られた収益だけでなく、個別銘柄バスケットを用いることによって得られた収益がどの程度得られるかを、通常の日経 225 インデックスのデルタヘッジと個別銘柄バスケットのデルタヘッジを比べて実証分析を行った。個別銘柄バスケットの構築の際には、1 次モーメント(ドリフト)と 2 次モーメント(社数)の 2 つを勘案した原資産選択基準を用い、日経 225 インデックスと同じ 2 次モーメントを持ち、1 次モーメントのみが異なる(より多くなる)個別銘柄バスケットでデルタヘッジを行った結果、収益額とシャープレシオの両方の観点から高いパフォーマンスを、また、シャープレシオにおいては λ に応じて収益とその標準偏差との間のトレードオフを確認することができた。

今後の課題としては、個別銘柄バスケットを用いた場合に収益性が高まる理由を数式を用いて明確にし、高パフォーマンスとなるメカニズムの解明をすることである。

参考文献

- [1] 北川 源四郎,『時系列解析入門, 岩波書店, (2005).
- [2] 東京大学教養学部統計学教室,『統計学入門』, 東京大学出版会, (1991).
- [3] 淵江哲郎,「日経平均株価オプションのダイナミック・ヘッジング」,日本経営財務研究学会第 26 回全国大会第 8 セッション第 2 報告書, (2002).
- [4] 矢萩一樹, 宮崎浩一: デルタヘッジによる収益の不確実性に関する検証モデル, 情報処理学会論文誌 数理モデル化と応用, Vol.46 No. SIG10 (TOM12), pp.158-171 (2005).
- [5] Akaike, H. "A new look at the statistical model identification." *IEEE Trans. Automat. Contrl.* AC-19, (1974) pp. 667-674.
- [6] Hull, J., *Options, Futures, & Other Derivatives*, Fourth Edition, Prentice Hall, (2000).